Projektovanje elektronskih kola

Sadržaj:

1. Uvod - osnovni pojmovi
2. Stilovi projektovanja i izrade prototipova
3. **Projektovanje analognih kola**
4. **Osnove fizičkog projektovanja (projektovanje štampanih ploča)**
5. **Projektovanje digitalnih kola (vežbe)**

Projektovanje elektronskih kola

Koji su koraci potrebni da bi se projektovala analogna kola?

1. **Naučiti osobine pojedinih analognih kola (pojačavači,...)**
2. **Izabrati pravu topologiju za dati zadatak (strukturno projektovanje).**
3. **Odrediti vrednosti parametara pojedinih komponenata (gm, otpornost, kapacitivnost,...)**
4. **Proveriti da li smo dobili željeni odziv.**
5. **Ako smo zadovoljni idemo na fizičko projektovanje**

Projektovanje elektronskih kola

Koji su koraci potrebni da bi se projektovala analogna kola?

1. Naučiti osobine pojedinih analognih kola (pojačavači,...)
2. Izabrati pravu topologiju za dati zadatak (strukturno projektovanje).
3. **Odrediti vrednosti parametara pojedinih komponenata (gm, otpornost, kapacitivnost,...)**
4. **Proveriti da li smo dobili željeni odziv.**
5. **Ako smo zadovoljni idemo na fizičko projektovanje**

Projektovanje elektronskih kola

Suština je u

- **određivanju vrednosti parametara pojedinih komponenata kola (sinteza) i**
- **proveri da li je dobijen željeni odziv**

Vrednosti parametara određuju se automatski, primenom programa za optimizaciju parametara, a za proveru se koriste programi za analizu kola.

U oviru optimizacije ponavljaju se koraci promene parametara kola i poređenje dobijenog odziva sa željenim.

Projektovanje elektronskih kola

Suština je u
- **određivanju vrednosti parametara pojedinih komponenata kola (sinteza) i**
- **proveri da li je dobijen željeni odziv**

Vrednosti parametara određuju se automatski, primenom programa za optimizaciju parametara, a za proveru se koriste programi za analizu kola.

U oviru optimizacije ponavljaju se koraci izračunavanja vrednosti parametara kola koje dovode do smanjenja odstupanja dobijenog odziva od željenog.

Projektovanje elektronskih kola

Projektovanje analognih kola

Funkcija => šta hoćemo

Šema => kako realizovati

Šta nedostaje?

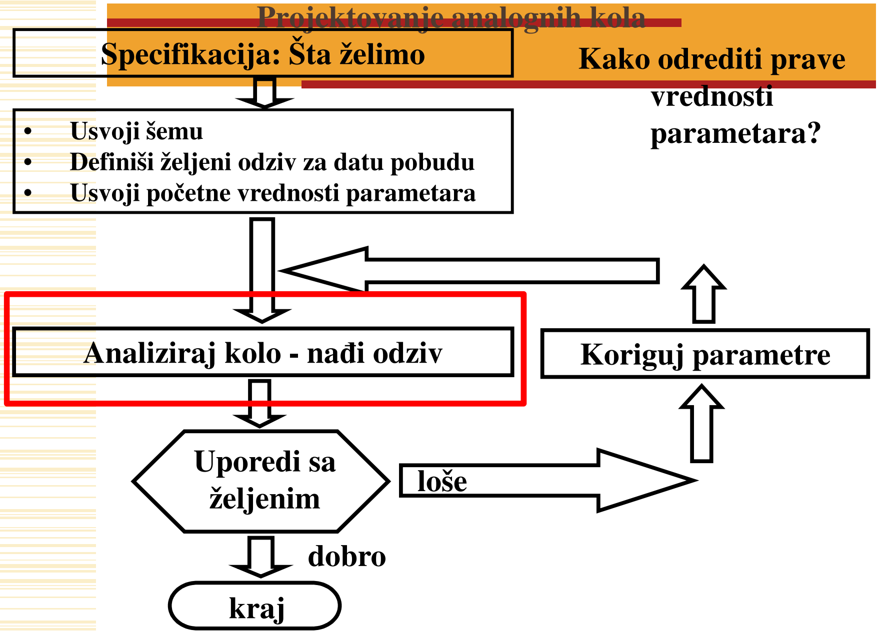
Vrednosti parametara da bi se dobio željeni odziv

Kako odrediti prave vrednosti parametara?

LEDA - Laboratory for Electronic Design Automation
http://leda.elfak.ni.ac.rs/

Projektovanje analognih kola

Kako odrediti prave vrednosti parametara?



Projektovanje elektronskih kola

Tokom svakog koraka neophodno je analizirati ponašanje kola sa korigovanim vrednostima parametara.

Zato ovaj deo projektovanja počinjemo upoznavaljem sa metodama za analizu elektronskih kola.

Analiza elektronskih kola

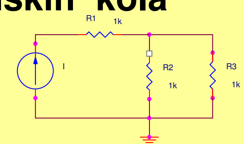
1. Uvod
2. Analiza linearnih kola u DC domenu (jednosmerni režim)
3. Analiza linearnih kola u AC domenu (frekvencijski domen)
4. Analiza linearnih kola u TR domenu (vremenski domen)
5. Analiza nelinearnih kola u DC domenu
6. Analiza nelinearnih kola u TR domenu

Analiza elektronskih kola

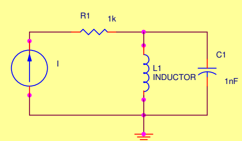
1. Uvod
2. Analiza linearnih kola u DC domenu (jednosmerni režim) 10
3. Analiza linearnih kola u AC domenu (frekvencijski domen)
4. Analiza linearnih kola u TR domenu (vremenski domen)
5. Analiza nelinearnih kola u DC domenu
6. Analiza nelinearnih kola u TR domenu

Tipovi elektronskih kola

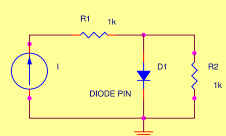
1. Linearna otporna



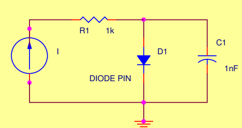
2. Linearna reaktivna



3. Nelinearna otporna



4. Nelinearna reaktivna



Analiza kola

Šta podrazumeva?

Odrediti odziv kola kada je poznata pobuda.

Odziv: Nepoznati naponi i struje u kolu

Pobuda: Poznate struje i naponi u kolu

Analiza:

Odrediti nepoznate napone i struje u kolu ako je poznata pobuda i vrednosti elemenata kola

Analiza kola

Tipovi analize?

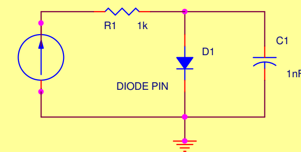
Zavisno od vrste pobude, ima smisla analizirati ponašanje kola u

1. jednosmernom domenu (određivanje položaja jednosmerne radne tačke kola).
2. frekvencijskom domenu (frekvencijska karakteristika kola – amplitudska, fazna)
3. vremenskom domenu (talasni oblik napona/struja na izlazu kola pobuđenog impulsima poznatog talasnog oblika)

Tipovi analize kola

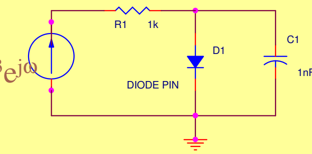
1. Jednosmerni domen (DC analiza)

I=5mA



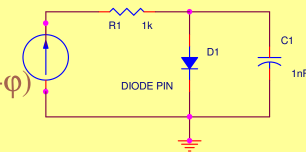
2. Frekvencijski domen (AC analiza)

$i(\omega)=5\cdot 10^{-3}e^{j\omega}$



3. Vremenski domen (TR analiza)

$i(t)=510^{-3}\cos(2\pi ft+\varphi)$



Analiza kola

Tipovi analize?

Zavisno od vrste elemenata od kojih se kolo sastoji, različiti tip problema i metoda za analizu

1. Linearna otporna kola (R, linearni generatori, nezavisni i kontrolisani)
2. Linearna reaktivna kola (R, L, C, m, ...)
3. Nelinearna otporna (poluprovodničke komponente, R, ...)
4. Nelinearna reaktivna (poluprovodničke komponente, R, L, C,...)

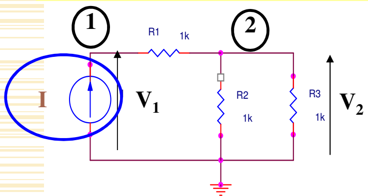
Tipovi elektronskih kola

1. Linearna otporna
   R
2. Linearna reaktivna
   L, C, m, ...
3. Nelinearna otporna
   dioda, tranzistor, R, ...
4. Nelinearna reaktivna
   dioda, tranzistor, R, L, C,...

Tipovi analize kola

1. Jednosmerni domen (DC analiza)
2. Frekvencijski domen (AC analiza)
3. Vremenski domen (TR analiza)

Ponašanje linearnih otpornih kola u jednosmernom domenu opisuje se sistemom linearnih algebarskih jednačina



$$\frac{V_1 - V_2}{R_1} = I$$

$$\frac{V_2 - V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_2}{R_3} = 0$$

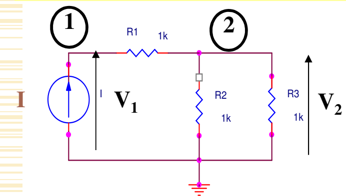
Tip kola i analize

1. Linearna otporna kola u DC domenu

Matematički model

1. Linearne algebarske jednačine

Ponašanje linearnih otpornih kola u jednosmernom domenu opisuje se sistemom linearnih algebarskih jednačina



$$\frac{1}{R_1}V_1 - \frac{1}{R_1}V_2 = I$$

$$-\frac{1}{R_1}V_1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)V_2 = 0$$

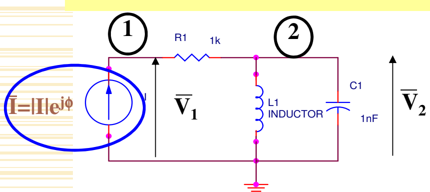
Tip kola i analize

1. Linearna otporna kola u DC domenu

Matematički model

1. Linearne algebarske jednačine

Ponašanje linearnih reaktivnih kola u frekvencijskom domenu opisuje se sistemom linearnih algebarskih jednačina sa kompleksnim koeficijentima



$$\frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_2}{R_1} = \bar{I}$$

$$\frac{\bar{V}_2 - \bar{V}_1}{R_1} + \frac{\bar{V}_2}{j\omega \cdot L_1} + j\omega \cdot C_1 \bar{V}_2 = 0$$

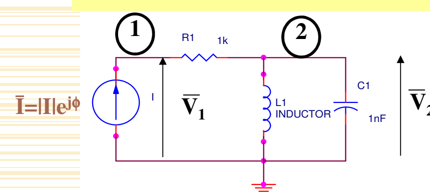
Tip kola i analize

2. Linearna reaktivna u AC domenu

Matematički model

2. Linearne algebarske jednačine sa kompleksnim koeficijentima

Ponašanje linearnih reaktivnih kola u frekvencijskom domenu opisuje se sistemom linearnih algebarskih jednačina sa kompleksnim koeficijentima



$$\frac{1}{R_1}\bar{V}_1 - \frac{1}{R_1}\bar{V}_2 = \bar{I}$$

$$-\frac{1}{R_1}\bar{V}_1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega \cdot L_1} + j\omega \cdot C_1\right)\bar{V}_2 = 0$$

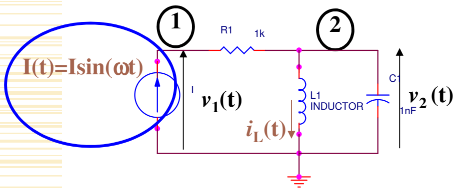
Tip kola i analize

2. Linearna reaktivna u AC domenu

Matematički model

2. Linearne algebarske jednačine sa kompleksnim koeficijentima

Ponašanje linearnih reaktivnih kola u vremenskom domenu opisuje se sistemom linearnih diferencijalnih jednačina



$$\frac{v_1(t)-v_2(t)}{R_1}=i(t)$$

$$\frac{v_2(t)-v_1(t)}{R_1}+i_L(t)+C_1\frac{\partial v_2(t)}{\partial t}=0$$

$$v_2(t)-L\frac{\partial i_L(t)}{\partial t}=0$$

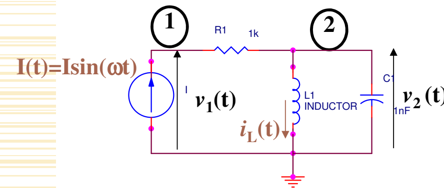
Tip kola i analize

3. Linearna reaktivna u TR domenu

Matematički model

3. Linearne diferencijalne jednačine

Ponašanje linearnih reaktivnih kola u vremenskom domenu opisuje se sistemom linearnih diferencijalnih jednačina



$$\frac{1}{R_1}v_1(t)-\frac{1}{R_1}v_2(t)=i(t)$$

$$-\frac{1}{R_1}v_1(t)+\frac{1}{R_1}v_2(t)+i_L(t)+C_1\frac{\partial v_2(t)}{\partial t}=0$$

$$v_2(t)-L\frac{\partial i_L(t)}{\partial t}=0$$

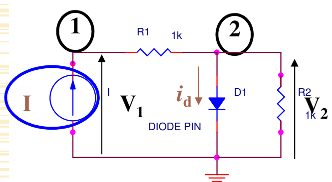
Tip kola i analize

3. Linearna reaktivna u TR domenu

Matematički model

3. Linearne diferencijalne jednačine

Ponašanje nelinearnih kola u jednosmernom domenu opisuje se sistemom nelinearnih algebarskih jednačina



$$\frac{V_1-V_2}{R_1}=I$$

$$\frac{V_2-V_1}{R_1}+i_d(V_2)+\frac{V_2}{R_2}=0$$

$$i_d(V_2)=I_s(e^{\frac{V_2}{V_T}}-1)$$

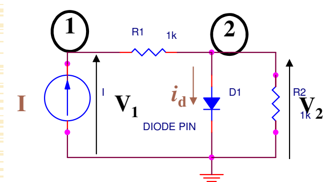
Tip kola i analize

4. Neinearna otporna u DC domenu

Matematički model

4. Nelinearne algebarske jednačine

Ponašanje nelinearnih kola u jednosmernom domenu opisuje se sistemom nelinearnih algebarskih jednačina



$$\frac{1}{R_1}V_1-\frac{1}{R_1}V_2=I$$

$$-\frac{1}{R_1}V_1+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)V_2+I_s(e^{\frac{V_2}{V_T}}-1)=0$$

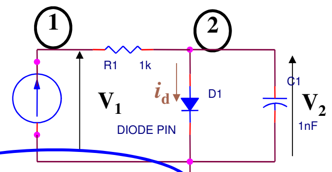
Tip kola i analize

4. Neinearna otporna u DC domenu

Matematički model

4. Nelinearne algebarske jednačine

Ponašanje nelinearnih reaktivnih kola u vremenskom domenu domenu opisuje se sistemom nelinearnih diferencijalnih jednačina



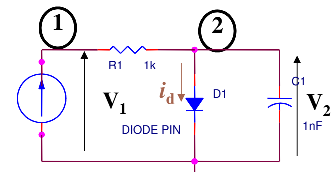
$i(t)=510^{-3}\cos(2\pi ft+\varphi)$

$$\frac{v_1(t)-v_2(t)}{R_1}=i(t)$$

$$\frac{v_2(t)-v_1(t)}{R_1}+I_s(e^{\frac{v_2(t)}{V_T}}-1)+C\frac{\partial v_2(t)}{\partial t}=0$$

Tip kola i analize	Matematički model
5. Neinearna reaktivna u TR domenu	5. Nelinearne diferencijalne jednačine

Ponašanje nelinearnih reaktivnih kola u vremenskom domenu domenu opisuje se sistemom nelinearnih diferencijalnih jednačina



$i(t)=510^{-3}\cos(2\pi ft+\varphi)$

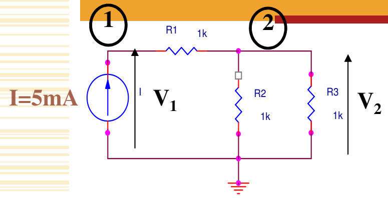
$$\frac{1}{R_1}v_1(t)-\frac{1}{R_1}v_2(t)=i(t)$$

$$-\frac{1}{R_1}v_1(t)+\frac{1}{R_1}v_2(t)+I_s(e^{\frac{v_2(t)}{V_T}}-1)+C\frac{\partial v_2(t)}{\partial t}=0$$

Tip kola i analize	Matematički model
5. Neinearna reaktivna u TR domenu	5. Nelinearne diferencijalne jednačine

Tipovi kola i analize	Matematički model
1. Linearna otporna DC domen	1. Linearne algebarske jednačine
2. Linearna reaktivna AC domen	2. Linearne algebarske jednačine (kompleksne)
3. Linearna reaktivna TR domen	3. Linearne diferencijalne jednačine
4. Nelinearna otporna DC domen	4. Nelinearne algebarske jednačine
5. Nelinearna reaktivna TR domen	5. Nelinearne diferencijalne jednačine

Matematički model	Način rešavanja sistema j-na
1. i 2. Linearne jednačine (realne i kompleksne)	1. i 2. LU faktorizacija (Gauss)
3. Linearne diferencijalne jednačine	3. Numeričko integraljenje - diskretizacija - svođenje na linearne algebarske (Euler)
4. Nelinearne algebarske jednačine	4. Linearizacija - Iterativno svođenje na linearne algebarske (Newton-Kantorovič)
5. Nelinearne diferencijalne jednačine	5. Diskretizacija - svođenje na nelinearne algebarske i linearizacija - Iterativno svođenje na linearne algebarske



$$\frac{V_1-V_2}{R_1}=I$$

$$\frac{V_2-V_1}{R_1}+\frac{V_2}{R_2}+\frac{V_2}{R_3}=0$$

$$\frac{1}{R_1}V_1-\frac{1}{R_1}V_2=I$$

$$-\frac{1}{R_1}V_1+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)V_2=0$$

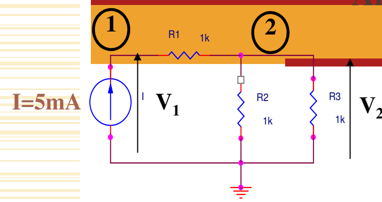
$$\mathbf{10^{-3}V_1-10^{-3}V_2=5\cdot 10^{-3}}$$

$$\mathbf{-10^{-3}V_1+(10^{-3}+10^{-3}+10^{-3})V_2=0}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1}\\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}10^{-3} & -10^{-3}\\ -10^{-3} & 3\cdot 10^{-3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\cdot 10^{-3}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{G}}\cdot\underline{\mathbf{v}}=\underline{\mathbf{i}}$$



$$\cancel{10^{-3}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\cancel{10^{-3}}\begin{bmatrix}5\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{G}}\cdot\underline{\mathbf{v}}=\underline{\mathbf{i}}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 0\end{bmatrix}$$

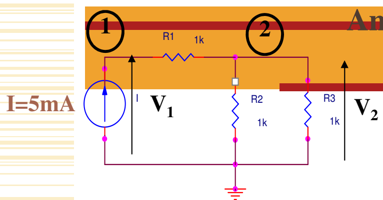
$$\underset{\sim}{\mathbf{G}}\cdot\underline{\mathbf{v}}=\underline{\mathbf{i}}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{G}}=\underset{\sim}{\mathbf{L}}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{U}}$$

$$\begin{bmatrix}g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n}\\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ l_{21} & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n}\\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & u_{nn}\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{L}}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{U}}\cdot\underline{\mathbf{v}}=\underline{\mathbf{i}}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ l_{21} & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n}\\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & u_{nn}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}v_1\\ v_1\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i_1\\ i_1\\ \vdots\\ i_n\end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{G}}\cdot\underline{\mathbf{v}}=\underline{\mathbf{i}}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{L}}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{U}}\cdot\underline{\mathbf{v}}=\underline{\mathbf{i}}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ l_{21} & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1\end{bmatrix}\cdot\overbrace{\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n}\\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & u_{nn}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}}^{\underline{\mathbf{x}}}=\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\\ \vdots\\ i_n\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{L}}\cdot\underline{\mathbf{x}}=\underline{\mathbf{i}}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ l_{21} & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\\ \vdots\\ i_n\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{U}}\cdot\underline{\mathbf{v}}=\underline{\mathbf{x}}$$

$$\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n}\\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & u_{nn}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{L}}\cdot\underline{\mathbf{x}}=\underline{\mathbf{i}}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ l_{21} & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\Downarrow=\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\\ \vdots\\ i_n\end{bmatrix}$$

$x_1=i_1$

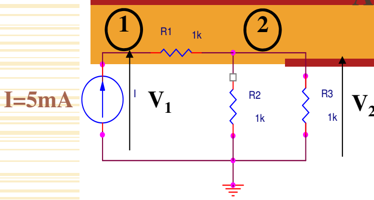
$l_{21}x_1+x_2=i_2 \Rightarrow x_2=i_2-l_{21}x_1$

$$\underset{\sim}{\mathbf{U}}\cdot\underline{\mathbf{v}}=\underline{\mathbf{x}}$$

$$\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & \dots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n}\\ 0 & \dots & 0 & u_{nn}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_{n-1}\\ v_n\end{bmatrix}\Uparrow=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}$$

$v_{n-1}=(x_n-u_{n-1n}v_n)/u_{n-1n-1}$

$u_{nn}v_n=x_n \Rightarrow v_n=x_n/u_{nn}$

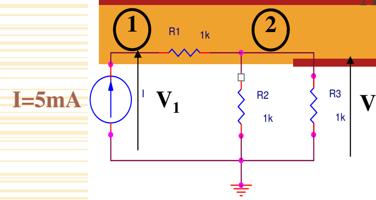


$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V_1} \\ \mathbf{V_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{G}} \cdot \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{i}}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{\mathbf{G}} = \underset{\sim}{\mathbf{L}} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V_1} \\ \mathbf{V_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{G}} \cdot \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{i}}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}$$

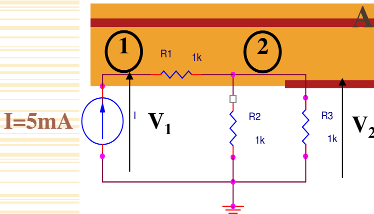
$l_{11} = 1$
$l_{12} = 0;$
$l_{21} = ?;$
$l_{22} = 1$

$u_{11} = \mathbf{?}$
$u_{12} = \mathbf{?}$
$u_{21} = 0$
$u_{22} = \mathbf{?}$

$u_{1j} = g_{1j}$

$u_{11} = g_{11} = 1;$
$u_{12} = g_{12} = \text{-}1$

$$\sum_{k=1}^{n} l_{ik} \cdot u_{kj} = g_{ij},$$



$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V_1} \\ \mathbf{V_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{G}} \cdot \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{i}}$$

$l_{11} = 1$
$l_{12} = 0;$
$l_{21} = \mathbf{?};$
$l_{22} = 1$

$$\underset{\sim}{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

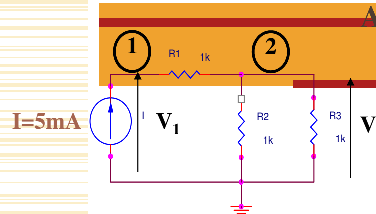
$u_{11} = g_{11} = 1$
$u_{12} = g_{12} = -1$
$u_{21} = 0$
$u_{22} = \mathbf{?}$

$$\underset{\sim}{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{n} l_{ik} \cdot u_{kj} = g_{ij},$$

za $i = 2,\ j = 1,\ n = 2$

$$l_{21} \cdot u_{11} + l_{22} \cdot u_{21} = l_{21} \cdot u_{11} + l_{22} \cdot 0 = g_{21} \Rightarrow l_{21} \cdot u_{11} = g_{21} \quad \Rightarrow \quad l_{21} = \frac{g_{21}}{u_{11}} = \frac{-1}{1} = -1$$



$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V_1} \\ \mathbf{V_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{G}} \cdot \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{i}}$$

$l_{11} = 1$
$l_{12} = 0;$
$l_{21} = -1;$
$l_{22} = 1$

$$\underset{\sim}{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

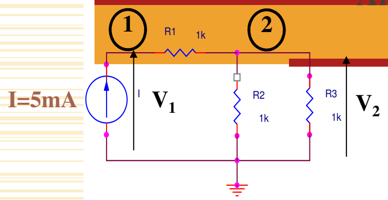
$u_{11} = g_{11} = 1$
$u_{12} = g_{12} = -1$
$u_{21} = 0$
$u_{22} = \mathbf{?}$

$$\underset{\sim}{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{n} l_{ik} \cdot u_{kj} = g_{ij},$$

za $i = 2,\ j = 2,\ n = 2$

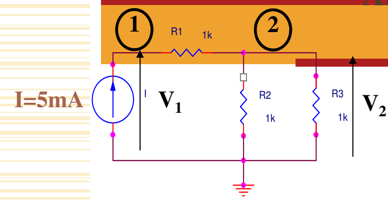
$$l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \cdot u_{22} = l_{21} \cdot u_{12} + 1 \cdot u_{22} = g_{22} \Rightarrow u_{22} = g_{22} - l_{21} \cdot u_{12} \quad \Rightarrow \quad u_{22} = 3 - 1 = 2$$



$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{G}} \cdot \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{i}}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \underset{\sim}{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

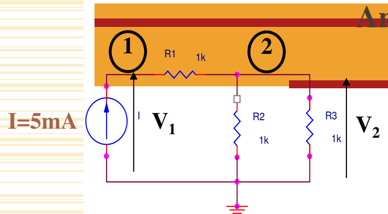
$$\underset{\sim}{\mathbf{G}} \cdot \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{i}}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{L}} \cdot \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{i}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \Downarrow \quad \Rightarrow x_1 = 5$$

$$\Rightarrow -1 \cdot x_1 + x_2 = 0 \qquad \Rightarrow x_2 = x_1 = 5$$

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

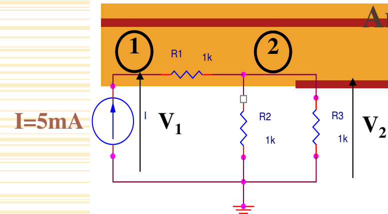


$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{G}} \cdot \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{i}}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{U}} \cdot \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{x}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \Uparrow \quad \Rightarrow 2 \cdot v_2 = 5 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 2.5V$$



$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{G}} \cdot \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{i}}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{U}} \cdot \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{x}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \Uparrow \quad 1 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2 = 5 \;\Rightarrow\; v_1 = 5 + v_2 \; = 5 + 2.5 = 7.5\text{V}$$

$$v_2 = 2.5V$$

$$\underline{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

I. Uvod: Šta smo naučili?

Šta treba da znamo?

Elementarno (za potpis)

Šta se podrazumeva pod analizom kola?

Osnovna (za 6)

1. **Domeni analize kola**
2. **Tipovi kola i odgovarajući tip analize**

Šta treba da znamo?

Ispitna pitanja

a) **Osnovni principi na kojima je zasnovana analiza digitalnih kola (logička simulacija).**

b) **Koji tip jednačina opisuje ponašanje linearnih otpornih kola u jednosmernom domenu?**

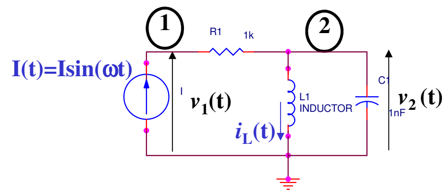
c) **Koji tip jednačina opisuje ponašanje linearnih reaktivnih kola u frekvencijskom domenu?**

d) **Koji tip jednačina opisuje ponašanje nelinearnih otpornih kola u jednosmernom domenu?**

e) **Koji tip jednačina opisuje ponašanje linearnih reaktivnih kola u vremenskom domenu?**

f) **Koji tip jednačina opisuje ponašanje nelinearnih reaktivnih kola u vremenskom domenu?**

Matematički model	Način rešavanja sistema j-na
1. i 2. Linearne jednačine (realne i kompleksne)	1. i 2. LU faktorizacija (Gauss)
3. Linearne diferencijalne jednačine	3. Numeričko integraljenje - diskretizacija - svođenje na linearne algebarske (Euler)
4. Nelinearne algebarske jednačine	4. Linearizacija - Iterativno svođenje na linearne algebarske (Newton-Kantorovič)
5. Nelinearne diferencijalne jednačine	5. Diskretizacija - svođenje na nelinearne algebarske i linearizacija - Iterativno svođenje na linearne algebarske



$$\frac{v_1(t)-v_2(t)}{R_1}=\mathrm{i}(t)$$

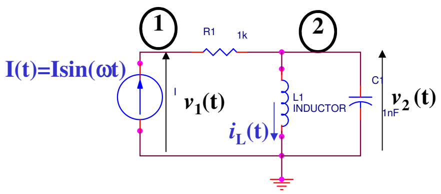
$$\frac{v_2(t)-v_1(t)}{R_1}+i_L(t)+C_1\frac{\partial v_2(t)}{\partial t}=0$$

$$v_2(t)-L\frac{\partial i(t)}{\partial t}=0$$

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=f(x)$$

Diskretizacija vremenske ose

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}_{n+1})=\frac{\mathbf{x}(\mathbf{t}_{n+1})-\mathbf{x}(\mathbf{t}_n)}{\mathbf{t}_{n+1}-\mathbf{t}_n}=\frac{\mathbf{x}(\mathbf{t}_{n+1})-\mathbf{x}(\mathbf{t}_n)}{\mathbf{h}}=\frac{\mathbf{x}^{n+1}-\mathbf{x}^n}{\mathbf{h}}$$



$$\frac{v_1(t)-v_2(t)}{R_1}=i(t)$$

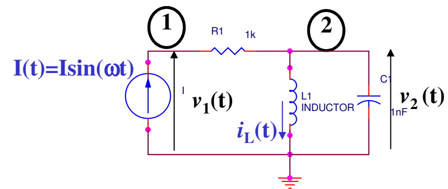
$$\frac{v_2(t)-v_1(t)}{R_1}+i_L(t)+C_1\frac{\partial v_2(t)}{\partial t}=0$$

$$v_2(t)-L\frac{\partial i(t)}{\partial t}=0$$

$$\frac{v_1(t_{n+1})-v_2(t_{n+1})}{R_1}=i(t_{n+1})$$

$$\frac{v_2(t_{n+1})-v_1(t_{n+1})}{R_1}+i_L(t_{n+1})+C_1\frac{v_2(t_{n+1})-v_2(t_n)}{h}=0$$

$$v_2(t_{n+1})-L\frac{i_L(t_{n+1})-i_L(t_n)}{h}=0$$



$$\frac{1}{R_1}v_1^{n+1}-\frac{1}{R_1}v_2^{n+1}=i^{n+1}$$

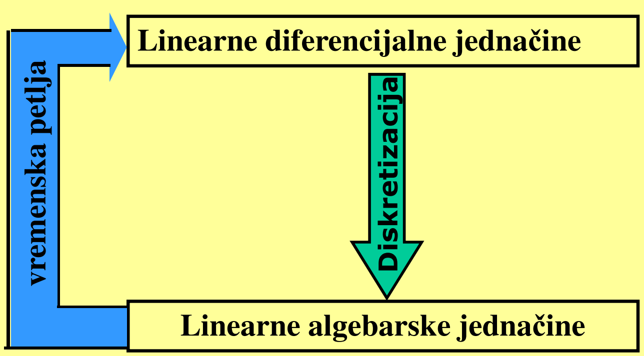
$$-\frac{1}{R_1}v_1^{n+1}+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{C_1}{h}\right)v_2^{n+1}+i_L^{n+1}=\frac{C_1}{h}v_2^n$$

$$v_2^{n+1}-\frac{L}{h}i_L^{n+1}=-\frac{L}{h}i_L^n$$

Sistem linearnih jednačina

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0\\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{C_1}{h} & 1\\ 0 & 1 & -\frac{L_1}{h}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}v_1^{n+1}\\ v_2^{n+1}\\ i_L^{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i^{n+1}\\ \frac{C_1}{h}v_2^n\\ -\frac{L_1}{h}i_L^n\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{G}}\cdot\underline{\mathbf{v}}^{n+1}=\underline{\mathbf{i}}^{n}$$



Diskretizacija vremenske ose.

Da bi se našlo rešenje u trenutku $t=t_{n+1}$, potrebno je da se zna rešenje za trenutak $t=t_n$.

Potrebno je definisati granične uslove za t=0.

Za analizu kola u intervalu do 50ms sa korakom 5µs potrebno je formirati i rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina 10 000 puta!

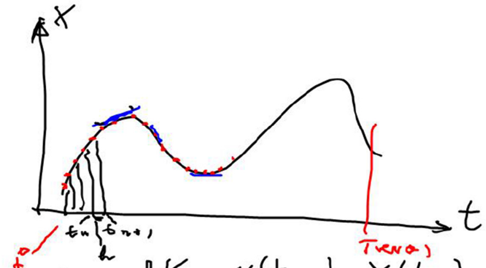
Diskretizacija vremenske ose.

Da bi se našlo rešenje u trenutku $t=t_{n+1}$, potrebno je da se zna rešenje za trenutak $t=t_n$.

Potrebno je definisati granične uslove za t=0.

Za analizu kola u intervalu do 50ms sa korakom 5µs potrebno je formirati i rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina 10 000 puta!

Analiza kola



5µs
50ms
$\frac{50000}{5} = 10000$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{t_{n+1} - t_n} = \frac{x^{n+1} - x^n}{h}$$

$$h = t_{n+1} - t_n$$

Analiza kola

Primena Eulerove formule na kapacitivnu granu

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt}$$

$$i_C^{n+1} = C\frac{(v_C^{n+1} - v_C^n)}{h}$$

$$i_C^{n+1} = \frac{C}{h}(v_C^{n+1} - v_C^n)$$

$$i_C^{n+1} = \frac{C}{h}v_C^{n+1} - \frac{C}{h}v_C^n$$

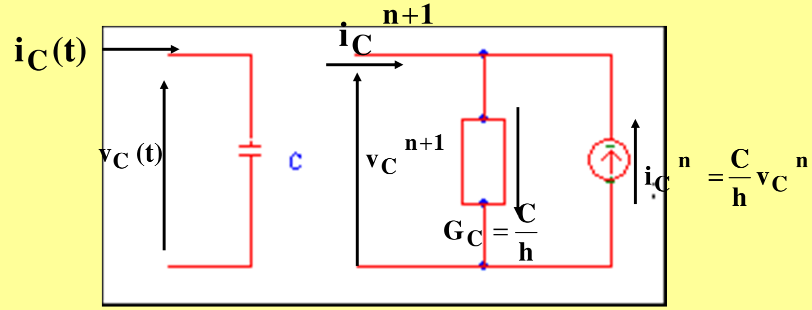
Analiza kola

Primena Eulerove formule na kapacitivnu granu

$$i_C^{n+1} = \frac{C}{h}v_C^{n+1} - \frac{C}{h}v_C^n$$

Struja $i_C(t_n+1)$ ima dve komponente:

Jedna zavisi od napona $v_C(t_n+1)$ a druga od $v_C(t_n)$



Analiza greške diskretizacije

Intuitivno je jasno (a znanja iz numeričke matematike to potvrđuju) da diskretizacija unesi određenu grešku, i da može da se očekuje da greška bude manja ako je korak diskretizacije manji i ako je promena sporija.

Želimo da utvrdimo

-koliko iznosi greška i

-od čega zavisi.

Analiza greške diskretizacije

Neka je $x(t_{n+1})$ tačna vrednost

a x^{n+1} izračunata vrednost pomenljive x.

Tada je lokalna greška zaokruživanja

(Local trncation Error, LTE)

$$\varepsilon_{Tx} = x(t_{n+1}) - x^{n+1}$$

Analiza greške diskretizacije

Razvojem funkcije x(t) u Tajlorov red u okolini tačke $t=t_{n+1}$ dobija se

$$x(t) = x(t_{n+1}) + (t - t_{n+1})\dot{x}\big|_{t=t_{n+1}} + \frac{1}{2}(t - t_{n+1})^2\ddot{x}\big|_{t=t_{n+1}} + \dots$$

za $t = t_n$

$$x(t_n) = x(t_{n+1}) + (t_n - t_{n+1})\dot{x}\big|_{t=t_{n+1}} + \frac{1}{2}(t_n - t_{n+1})^2\ddot{x}\big|_{t=t_{n+1}} + \dots$$

$$h = t_{n+1} - t_n,$$

$$x(t_n) = x(t_{n+1}) - h\dot{x}\big|_{t=t_{n+1}} + \frac{1}{2}h^2\ddot{x}\big|_{t=t_{n+1}} + \dots$$

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + h\dot{x}\big|_{t=t_{n+1}} - \frac{1}{2}h^2\ddot{x}\big|_{t=t_{n+1}} - \dots$$

Analiza greške diskretizacije

Na osnovu

$$\dot{x}(t_{n+1}) = \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{t_{n+1} - t_n} = \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h} = \frac{x^{n+1} - x^n}{h}$$

sledi da je približna vrednost promenljive x u trenutku $t=t^{n+1}$

$$x^{n+1} = x^n + h\dot{x}\big|_{t=t_{n+1}} \qquad \left(x(t_{n+1}) \cong x(t_n) + h\dot{x}\big|_{t=t_{n+1}} - \frac{1}{2}h^2\ddot{x}\big|_{t=t_{n+1}}\right)$$

Ako se pretpostavi da je u $t=t_n$, poznato tačno rešenje i da je $x(t_n)=x^n$, tada je

$$\varepsilon_{Tx} = x(t_{n+1}) - x^{n+1}$$

$$\varepsilon_{Tx} = \left(x(t_n) + h\dot{x}\big|_{t=t_{n+1}} - \frac{1}{2}h^2\ddot{x}\big|_{t=t_{n+1}}\right) - \left(x^n + h\dot{x}\big|_{t=t_{n+1}}\right) = \boxed{-\frac{1}{2}h^2\ddot{x}\big|_{t=t_{n+1}}}$$

Analiza greške diskretizacije

$$\varepsilon_{Tx} = x(t_{n+1}) - x^{n+1} = -\frac{1}{2}h^2\ddot{x}\Big|_{t=t_{n+1}}$$

Lokalna greška zaokruživanja (local truncation error LTE) proporcionalna je kvadratu veličine koraka h i brzini promene signala

Vremenski korak h ↘
Promena brzine odziva ↘ ⇨ **LTE** ↘

Analiza greške diskretizacije

Tokom izračunavanja izvoda pravi se, takođe, lokalna greška zaokruživanja izvoda

$$\varepsilon_{Td} = \dot{x}(t_{n+1}) - \dot{x}^{n+1}$$

$$x(t) = x(t_{n+1}) + (t - t_{n+1})\dot{x}\Big|_{t=t_{n+1}} + \frac{1}{2}(t - t_{n+1})^2\ddot{x}\Big|_{t=t_{n+1}} + \dots$$

za $t = t_n$

$$x(t_n) = x(t_{n+1}) + (t_n - t_{n+1})\dot{x}\Big|_{t=t_{n+1}} + \frac{1}{2}(t_n - t_{n+1})^2\ddot{x}\Big|_{t=t_{n+1}} + \dots$$

$h = t_{n+1} - t_n,$

$$\dot{x}\Big|_{t=t_{n+1}} = \dot{x}(t_{n+1}) = \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h} + \frac{1}{2}h\ddot{x}\Big|_{t=t_{n+1}} + \dots$$

Analiza greške diskretizacije

Znajući da je

$$\dot{x}^{n+1} = \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h}$$

sledi

$$\varepsilon_{Td} = \dot{x}(t_{n+1}) - \dot{x}^{n+1}$$

$$\varepsilon_{Td} = \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h} + \frac{1}{2}h\ddot{x}\Big|_{t=t_{n+1}} + \dots - \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h}$$

$$\varepsilon_{Td} = \frac{1}{2}h\ddot{x}\Big|_{t=t_{n+1}} + \dots$$

$$\varepsilon_{Td} \approx \frac{1}{2}h\ddot{x}\Big|_{t=t_{n+1}}$$

Analiza greške diskretizacije

Lokalna greška zaokruživanja izvoda (LTE izvoda) proporcionalna je veličini koraka h i brzini promene signala

Vremenski korak h ↘
Promena brzine odziva ↘ ⇨ **LTE izvoda** ↘

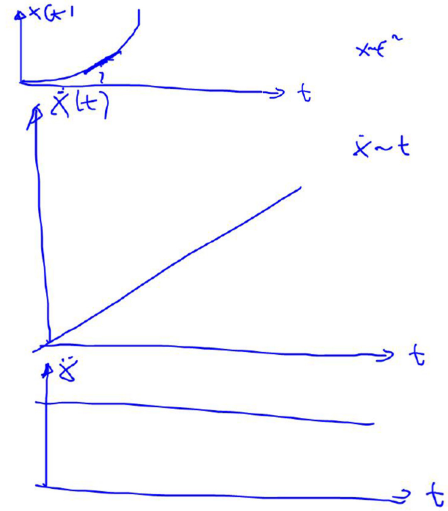
Analiza greške diskretizacije

$$\varepsilon_{Tx} = x(t_{n+1}) - x^{n+1} = -\frac{1}{2} h^{2} \ddot{x}\Big|_{t=t_{n+1}}$$

$$\varepsilon_{Td} = \frac{1}{2} h \ddot{x}\Big|_{t=t_{n+1}}$$

Greška je manja za monotone odzive jer se izvod aproksimira pravom linijom

Da se podsetimo: prvi i drugi izvod funkcije



Funkcija $x=t^2$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 2 \cdot t$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = 2$$

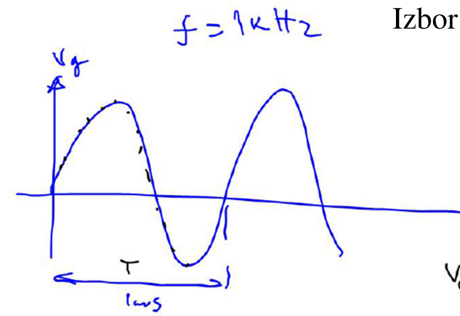
Izbor koraka diskretizacije

Izbor koraka diskretizacije

Kako izabrati pravu veličinu koraka?

Korak se bira na osnovu vrednosti elemenata kola i/ili na osnovu brzine promene signala pobude.

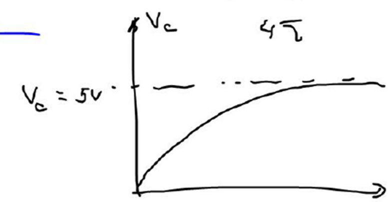
Izbor vremena završetka analize



$h = \frac{T}{10} = 100\mu s$

Zavisi od pobude
(recimo 10 tačaka po periodi)

$C = 10mF$
$R = 10\Omega$
4τ



$\tau = \frac{1}{RC} = \frac{1}{10\cdot 10^{-3}\cdot 10} = 0.1s$

$T_{kraj} = 0.4s$

Zavisi od očekivanog odziva
Da bi se C napunio treba najmanje 4τ

Analiza greške diskretizacije

Brzina promene signala u kolu zavisi od vrednosti vremenskih konstanti u kolu.

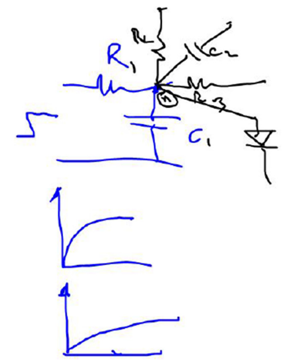
Dobra je praksa da se izabere korak h < τ/100 gde je τ lokalna vremenska konstanta.

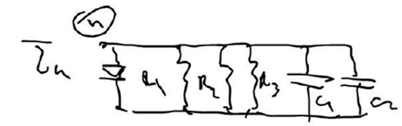
Bira se najmanji korak

Naravno, ako je ograničavajuća promena u kolu diktirana brzinom pobude, tada se izabere korak koji je u stanju da prati pobudu.

Veličina koraka analize h<τ/100

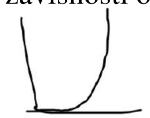
τ_n lokalna vremenska konstanta za čvor *n*





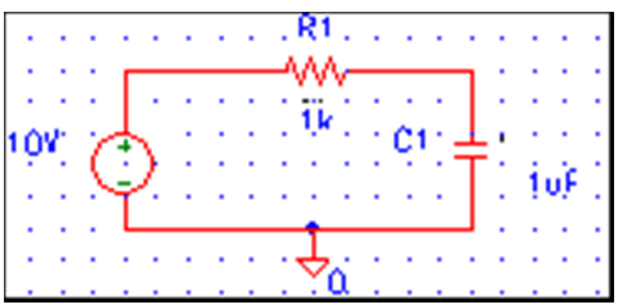
$$\tau_n = \frac{1}{(R_1 \| R_2 \| R_3)(C_1 + C_2)}$$

Otpornost diode – r_d – menja se u zavisnosti od režima



Primer

RC kolo τ=1ms

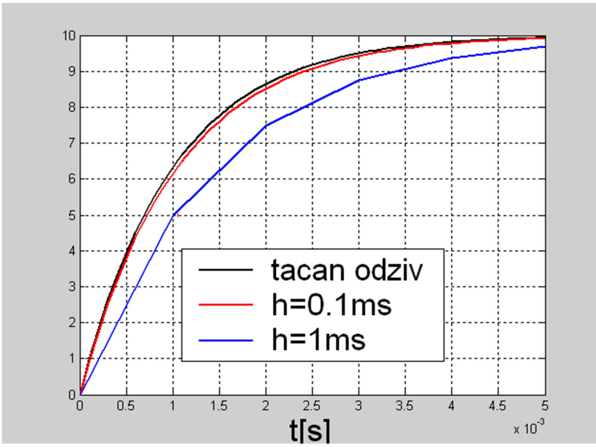


Primer

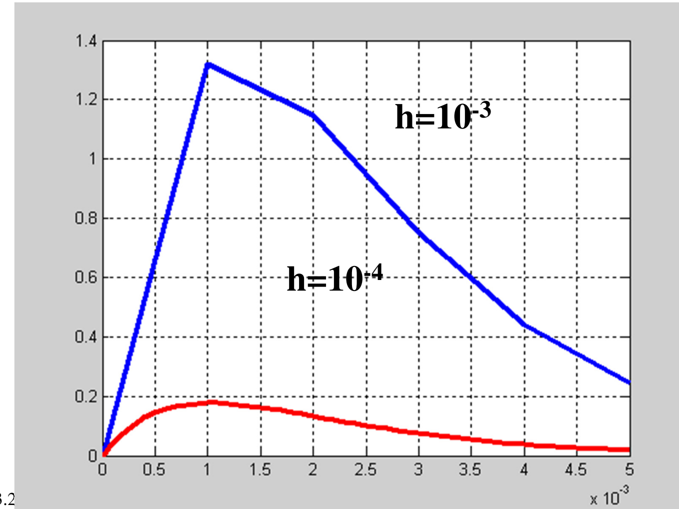
RC kolo τ=1ms

t	tačno	h=0.01ms	h=0.1ms	h=1ms
0	0	0	0	0
1E-5	9.900498	9.0099		
1E-4	9.04837	9.05287	9.09091	
1E-3	3.67879	3.69711	3.85543	5.00000

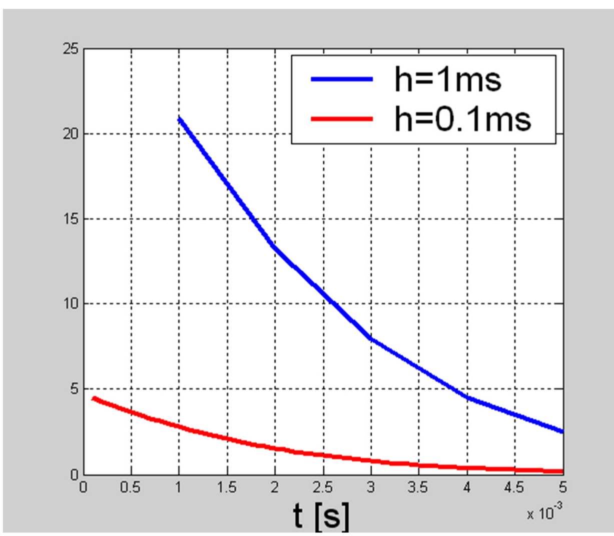
Odziv RC kola τ=1ms



apsolutna greška



relativna greška



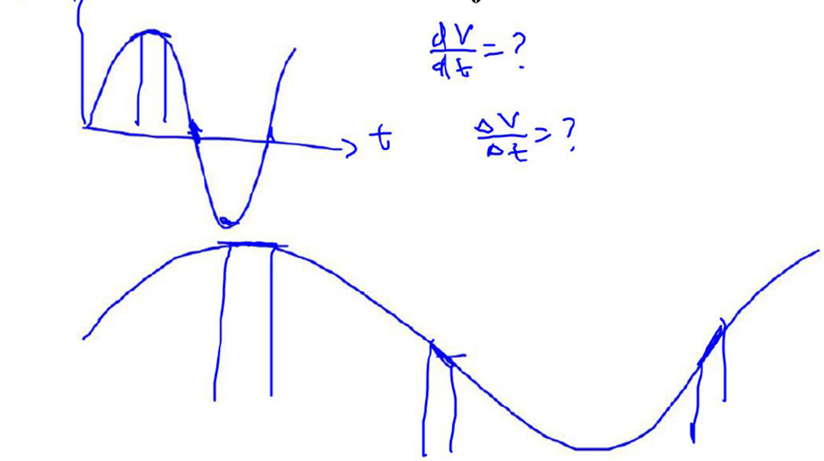
Analiza greške diskretizacije

Greška je proporcionalna veličini koraka h i brzini promene $\ddot{x}$ signala

Da bi se zadržala konstantna greška, treba smanjiti korak tamo gde je brzina promene signala veća i obrnuto.

Ovo je iskorišćeno u algoritmima za automatsku kontrolu koraka (Spice)

Gde je prvi izvod najveći za sinusnu pobudu?
Kako zavisi od frekvencije?



Analiza greške diskretizacije

Primer:

Neka je odziv sinusna funkcija sa amplitudom V=4V i periodom T=5ms. Odrediti minimalni korak da bi maksimalna LTE bila $\varepsilon_{Tx}= 10^{-4}$V dobija se:

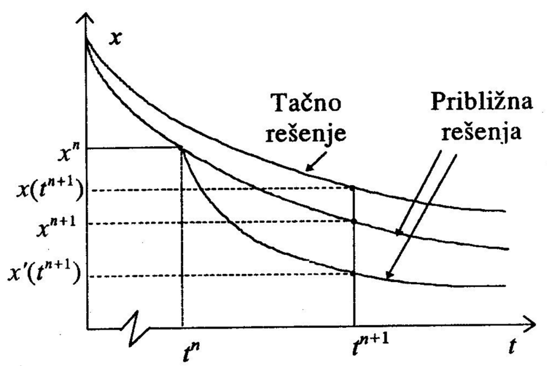
$$h_{min} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_{Tx}}{\ddot{x}}}$$

$$\ddot{x} = 4\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin\frac{2\pi}{T}t = 6{,}3\cdot 10^6\ \mathrm{V/s^2} \quad \Rightarrow \quad h_{min} = 5{,}6\mu s$$

$$N = \frac{T}{h} = \frac{5ms}{5{,}6\mu s} \approx 892$$

Za jednu periodu !!!

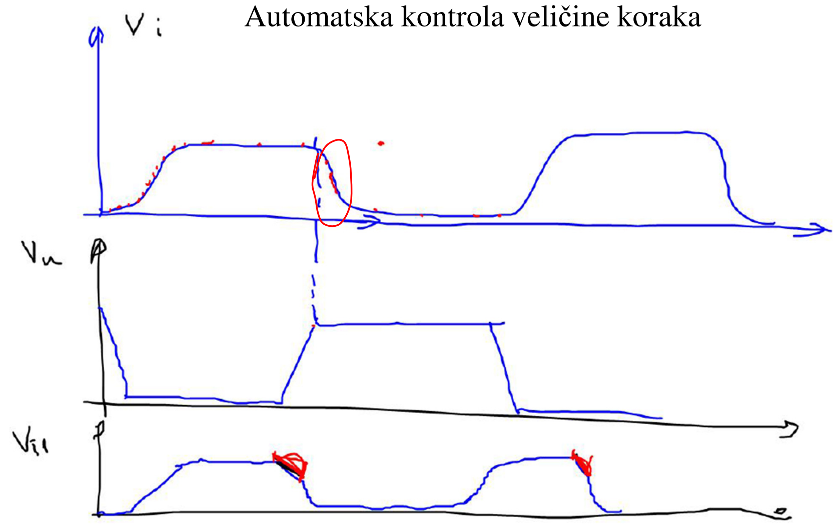
Analiza greške diskretizacije

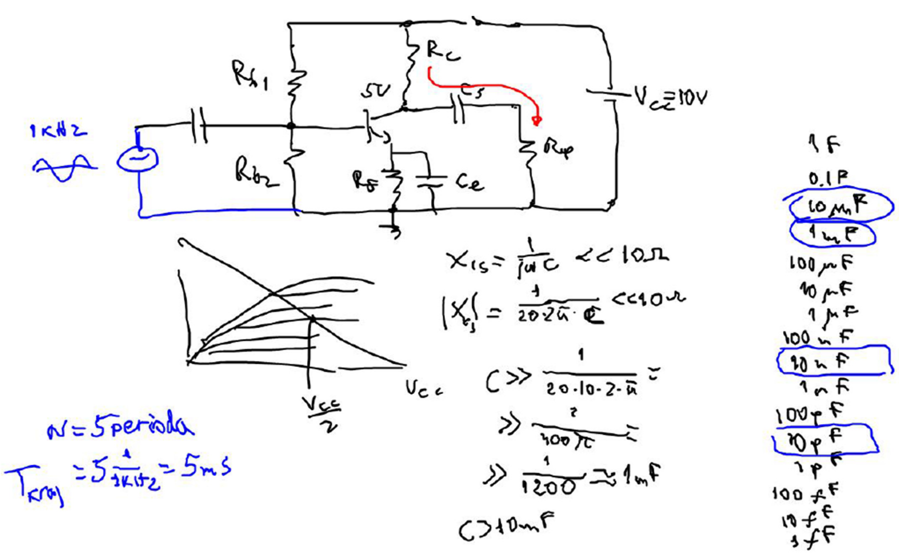


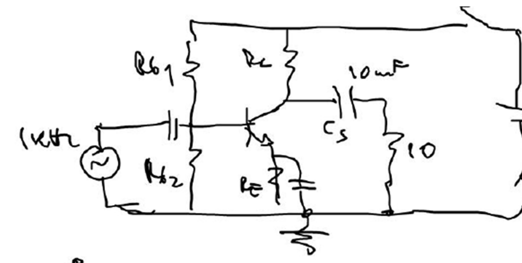
Greška može da se nagomilava

Ukoliko se ne povećava greška kaže se da je rešenje stabilno

Automatska kontrola veličine koraka







Da ne bismo „čekali“ da se uspostavi stacionarno stanje (C napunjen na DC, 4τ=0.4s, što je za pobudu od 1kHz 400 perioda) treba koristiti Spice naredbu .IC *Initial Condition*